Chapitre 3

Les fonctions réelles à variables réelles : limites et continuité

Sommaire

1 Généralités

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point) ou une réunion d'intervalles.

Définition 1.1. *On appelle fonction numérique sur* I, *toute application* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. *L'élément* $y = f(x)$ *est l'image de* x *par* f. *On note par* $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions numériques définie sur* I. *L'ensemble*

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathrm{I} \text{ avec } y = f(x)\}$$

est appelé l'image de I *par* f, *on le note* $f(\mathrm{I})$.

Définition 1.2. *Soit* f *une fonction numérique.*
On appelle domaine de définition de f *l'ensemble noté* D_f *des réels* x *tel que* $f(x)$ *soit définie, en général un* D_f *est un intervalle à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

1.1 Opérations sur les fonctions numériques

Définition 1.3. *Soient* f *et* g *deux fonctions, On définit sur l'ensemble* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *les lois isuivantes :*

- *Addition. Si* $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, *on définit l'application* $(f + g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *par :*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- *Multiplication par un réel. Si* $(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, *on définit l'application* $(\alpha f) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- *Multiplication de deux fonctions. Si* $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, *on définit l'application* $(fg) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

- *Valeur absolue d'une fonction. Si* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, *on définit l'application* $|f| \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

- *Maximum, Minimum de deux fonctions. Si* $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, *on définit les deux applications* $\sup(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *et* $\inf(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x)), \text{ et } \inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$$

Remarque 1.1. *La relation d'ordre* $\leq$ *sur* $\mathbb{R}$ *s'étend naturellement à* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *en posant, pour* $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$

$$f \leq g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leq g(x)$$

Proposition 1.1. *Soient* $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$. *On a*

$$|f| = \sup(f, -f), \quad \sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

Remarque 1.2. *En posant* $\begin{cases} f^+ & = \sup(f,0) \\ f^- & = \sup(-f,0) = -\inf(f,0) \end{cases}$ *on vérifie que*

$$\begin{cases} f^+ & = \dfrac{|f|+f}{2} \\ f^- & = \dfrac{|f|-f}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} f & = f^+ - f^- \\ |f| & = f^+ + f^- \end{cases}$$

Remarque 1.3.
- $(\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R}),+,.)$ *(où « . » désigne la multiplication par un scalaire) possède une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
- $(\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R}),+,\times)$ *(où «× » désigne le produit entre deux fonctions) possède une structure d'anneau.*
- *L'élément neutre pour l'addition est la fonction identiquement nulle,* $0_{\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})} : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{cases}$ *et l'élément neutre pour la multiplication est la fonction constante* $1_{\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})} : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{cases}$

1.2 Fonctions bornées

Définition 1.4. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. *On dit que* f *est :*
- *Majorée si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \ f(x) \leq M$. *Lorsque c'est le cas l'ensemble Im*(f) *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$, *que l'on appelle borne supérieure de* f *et que l'on note :* $\sup_{\mathrm{I}} f$ *ou encore* $\sup_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
- *Minorée si et seulement si* $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \ f(x) \geq m$. *Lorsque c'est le cas l'ensemble Im*(f) *admet une borne inférieure dans* $\mathbb{R}$, *que l'on appelle borne inférieure de* f *et que l'on note :* $\inf_{\mathrm{I}} f$ *ou encore* $\inf_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
- *Bornée si elle est majorée et minorée, ce qui équivaut à :*

$$\exists A > 0; \ \forall x \in \mathrm{I}; \quad |f(x)| \leq A$$

Lorsque c'est le cas l'ensemble $\{|f(x)|; x \in \mathrm{I}\}$ *possède une borne supérieure que l'on notera* $\sup_{\mathrm{I}} |f| = \|f\|_\infty$.

Proposition 1.2.
- *Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée (l'ensemble des fonctions bornées forme un sous espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$*).*
- *Tout produit de deux fonctions bornées est encore borné.*

1.3 Fonctions monotones

Définition 1.5. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$
- *La fonction* f *est dite croissante sur* I *si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad on\ a \ \ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- *La fonction* f *est dite décroissante sur* I *si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad on\ a \ \ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *La fonction* f *est dite monotone sur* I *si elle est croissante ou décroissante sur* I.

Lorsque les inégalités sont strictes on parle de fonctions strictement croissante (resp. décroissante).

Proposition 1.3. – *Soient* $f,\ g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- *Si* f *et* g *sont croissantes alors* $f+g$ *est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors* $f+g$ *est strictement croissante.*
- *Si* f *et* g *sont définies positives et croissantes (resp. décroissantes) alors* $f.g$ *est croissante (resp. décroissante).*

– *Si* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *et* $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ *avec* $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ *alors*
- *Si* f *et* g *sont croissantes (resp. décroissantes) alors* $g \circ f$ *est croissante.*
- *Si* g *est croissante (resp. décroissante) et* f *est décroissantes (resp. croissante) alors* $g \circ f$ *est décroissante .*

Démonstration. **Supposons par exemple** f **croissante sur** I **et** g **décroissante sur** J**. Montrons que** $g \circ f$ **est décroissante. Soient** $(x_1, x_2) \in \mathrm{I}$ **tels que** $x_1 \leq x_2$**. Comme** f **est croissante,** $f(x_1) \leq f(x_2)$ **et puisque** g **est décroissante,** $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ **et donc** $g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$**.** □

Exemple 3. *La fonction* $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}^+$ *car elle s'écrit comme la composée de deux fonctions* $h = g \circ f$*, l'une* f *croissante sur* $\mathbb{R}$ *:* $f(x) = x^2+1$ *et l'autre* g *décroissante sur* $\mathbb{R}^+$ *:* $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Théorème 1.1. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
Si f *est monotone sur le segment* $[a, b]$ *alors* f *est bornée.*

Démonstration. **Supposons que** f **est décroissante**
soit $x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a) \implies f$ **est bornée.**

Remarque 1.4. *Si* f *est monotone sur un intervalle ouvert, elle n'est pas nécessairement bornée.*

Exemple 4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *si* $x \in]0, 1]$*,* f *est décroissante mais* f *n'est pas bornée.*

1.4 Fonctions paires et fonction impaires

On suppose f **définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que si** $x \in \mathrm{I}$ **alors** $-x \in \mathrm{I}$**). Si cette condition n'est pas verifiée, la parité est une notion creuse : inutile de perdre du temps en le precisant à chaque fois.**

Définition 1.6. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$
- f *est paire si et seulement si,* $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = f(x)$*. Dans ce cas la courbe représentative de* f *admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*
- f *est impaire si et seulement si,* $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = -f(x)$*. Si c'est le cas, alors la courbe de* f *admet un centre de symétrie, l'origine du repère.*

Remarque 1.5. *Plus généralement, si* $\forall x \in \mathrm{I}$*,* $2a - x \in \mathrm{I}$ *et* $f(2a-x) = 2b - f(x)$*, alors la courbe de* f *admet le point* $A(a, b)$ *comme centre de symétrie.*

Exemple 5. *La fonction* $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ *est paire. Son domaine de définition est* $]-\infty; 1] \cup [1; +\infty[$*. La fonction* $f(x) = x^3 - x$ *est impaire Son domaine de définition est* $\mathbb{R}$*.*

1.5 Fonctions périodiques

Définition 1.7. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. f est dite périodique de période T si*

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathrm{I}/x+T \in \mathrm{I}.$$

Remarque 1.6.
- *Ainsi, si T est une période pour f, tous les nombres de la forme kT, $k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des périodes pour f.*
- *Si f est périodique, on appelle période fondamentale de f la plus petite période strictement positive si elle existe.*
- *L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire et par produit. En particulier, c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.*
- *Pour construire le graphe d'une fonction T-périodique, il suffit de construire l'arc relatif à $[\alpha, \alpha+T$, α quelconque. Le reste se déduit par des translations parallèles à l'axe des abscisses.*

Exemple - La fonction $f(x) = x - E(x)$ est 1-périodique

2 Limites d'une fonction

Définition 2.1. ***Point adhérent***
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel x est adhérent à la partie A lorsque

$$\forall \eta > 0 \quad \exists a \in A, \text{ tel que } |x-a| \leq \eta$$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de la partie A.

Définition 2.2. ***Propriété vraie au voisinage d'un point***
Soient f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$
- *On dit que la fonction f est définie au voisinage du point a si et seulement s'il existe un voisinage V_a de a telle que $V_a \subset \mathrm{I}$.*
- *On dit que f vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ au voisinage du point a si et seulement s'il existe un voisinage $V_a \subset \mathrm{I}$ de a tel que la restriction de f à V_a vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.*

2.1 Valeurs limites en un point

Définition 2.3. *Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f admet pour limite le réel ℓ en x_0 lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \text{ tel que } \quad (x \in \mathrm{I}, \ x \neq x_0, \ |x - x_0| \leq \eta) \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le réel ℓ est appelé limite de f en x_0. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 6. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. Nous allons montrer que f tend vers 1 quand x tend vers 1.*
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que si $|x-1| \leq \eta$ alors $|f(x) - 1| = 2|x-1| \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Proposition 2.1. ***(Définition de la limite à l'aide des voisinages)***
Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}_\ell, \quad \exists V \in \mathcal{V}_{x_0}, \quad f(V \cap \mathrm{I}) \subset W$$

Proposition 2.2. ***(Unicité de la limite)***
Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Démonstration. **Si f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0, alors on a, par définition :**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,\ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_2 > 0,\ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta_2 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta \ \Rightarrow\ |\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque alors $|\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon$ entraine que $\ell_1 = \ell_2$.

Proposition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 sur lequel la fonction f est bornée.*

Démonstration. **Remarquons d'abord que d'après l'inégalité triangulaire, on a**

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$$

Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < 1$$

Posons $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\in \mathcal{V}_{x_0}$ et $A = |\ell| + 1$. Donc

$$\forall x \in V \cap \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leq 1 + \ell \Longrightarrow |f(x)| \leq A$$

Proposition 2.4. ***(Caractérisation séquentielle)***
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$
(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Démonstration. **$\Rightarrow$). Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de I qui converge vers x_0. Nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Soit $\forall \varepsilon > 0$. Donc par définition :**

$$\exists \eta > 0 \ \ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, il existe un $N \geq 0$, tel que

$$\forall n \geq N,\ |x_n - x_0| \leq \eta. \tag{2}$$

donc de (1) et (2), on obtient

$$\forall n \geq N,\ |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie bien que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

$\Longleftarrow$) Par absurde, supposons que f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers x_0. La contraposée de la définition de la limite nous donne

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\eta > 0,\ (\exists x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta) \quad \textbf{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq 1$, en prenant $\eta = \dfrac{1}{n}$, il existera un réel $x_n \in \mathrm{I}$ et tel que $|x_n - x_0| \leq \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ainsi construite converge vers x_0 cependant, ℓ n'est pas limite de la suite $(f(x_n)_{n\geq 1}$.

Remarque 2.1. *La prosition ci-dessus sert surtout à montrer que certains fonctions n'ont pas de limites.*

Exemple 7.

1. *La fonction $f(x) = \sin(\dfrac{1}{x})\ \forall x \in \mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite au point 0 :*
   En effet, considérons les suites $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Elles convergent toutes les deux vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et pourtant on a $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$. Comme les deux limites sont différentes donc f n'admet pas de limite au point 0.
2. *La fonction $f(x) = E(x)$ n'admet pas de limite au point k :*
   En effet considérons les deux suites $x_n = k + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = k - \dfrac{1}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Elles convergent toutes les deux vers k lorsque n tend vers l'infini, et pourtant on a $E(x_n) = k$ et $E(y_n) = k - 1$. Comme les deux limites sont défférentes donc f n'admet pas de limite au point k.

Proposition 2.5. *Pour que $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ admet une limite au point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère de Cauchy*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ (x, x' \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta, |x' - x_0| \leq \eta) \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Démonstration. **($\Longrightarrow$) Par définition.**
($\Longleftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $x, x' \in \mathrm{I}$, $|x - x_0| < \eta$ et

$$|x' - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Soit (x_n) une suite de pointd de I qui tend vers x_0, alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$, $|x_n - x_0| < \eta$.
Il en résulte que si $p > N$ et $q > N$, $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$. La suite $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy et par suite elle converge. □

2.2 Limites infinies en un point

Définition 2.4. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.*

1. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on notera $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A)$.
   (b) *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = +\infty.$$

2. *On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

   (a) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < B)$.

   (b) *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty.$$

2.3 Valeur limite d'une fonction à l'infini

Définition 2.5. 1. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{I} =]a, +\infty[$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (x > \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

   (b) *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui diverge vers $+\infty$, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

2. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{I} =]-\infty, a[$. On dira que f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}^-,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (x < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

   (b) *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui diverge vers $-\infty$, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Remarque 2.2. *En combinant les définitions 2.4 et 2.5, on peut facilement définir aussi les limites*

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple 8. 1. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors* $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

2. $f(x) = \sin x$. *La limite en $x \longrightarrow \pm\infty$ n'existe pas. Idem pour $\cos x$.*

3. $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$. *Alors* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{sinx}{x} = 0$.

4. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^m}$. *Alors*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{a_m} \frac{x^n}{x^m}$$

   - *Si $m = n$, alors* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{a_m} = a$
   - *Si $m > n$ alors* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$
   - *Si $m < n$ alors* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

2.4 Limites à droite et à gauche

Nous avons vu dans la section précédente que la notion de limite d'une fonction en un point x_0 est liée au comportement de la fonction quand on s'approche de x_0 par des suites qui convergent vers x_0. Si on ne considère que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \leq x_0$ (respectivement $x_n \geq x_0$) on dira qu'on approche x_0 à gauche (respectivement à droite). Ceci justifie la définition suivante.

Définition 2.6. *1. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \quad (x_0 < x < x_0 + \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

cette limite est dite limite à droite de f en x_0.
On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} f(x)$

2. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \quad (x_0 - \eta < x < x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

cette limite est dite limite à gauche de f en x_0.
On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} f(x)$

Proposition 2.6. *Soit $f : \mathrm{I} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Démonstration. **Exercice**

Remarque 2.3. *En combinant les définitions 2.4 et 2.6, on peut facilement définir aussi les limites*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple 9. *1. Considérons la fonction définie par $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. Elle admet 1 comme limite à droite de 0 et -1 comme limite à gauche de 0. En effet,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

On déduit que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \\ \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \pm\infty. \end{aligned}$$

2.5 Propriétés des limites

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Proposition 2.7. *Soient* $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$ *et* $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. *On suppose que* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell_2$. *Alors :*

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$,
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (fg)(x) = \ell_1\ell_2$, *en particulier* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha\ell_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} |f| = |\ell_1|$.
4. *si* $\ell_2 \neq 0$ *et* $g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{\ell_2}$.

Démonstration.

1. **Soit** $\varepsilon > 0$. **Puisque** $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$,

$$\exists \eta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, **alors**

$$\exists \eta_2 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. **Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$, **on a bien**

$$|(f+g)(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2. **On commence par écrire**

$$|(fg)(x) - \ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x) - \ell_2] + \ell_2[f(x) - \ell_1]| \leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1|$$

Soit $\varepsilon > 0$. **Comme** f **admet une limite finie au point** x_0, **elle est bornée sur un voisinage de** x_0 **donc il existe** $\eta_3 > 0$ **et** $M > 0$ **tel que**

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta_3 \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Puisque $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$

$$\exists \eta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + M)}$$

Puisque $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$,

$$\exists \eta_2 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + M)}$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$. **Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$, **en remplaçant dans la majoration**

précédente,

$$|(fg)(x) - \ell_1\ell_2| \leq M\frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + M)} + |\ell_2|\frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + M)} = \varepsilon$$

3. C'est facile à déduire de la minoration de l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| - |\ell_1| \leq |f(x) - \ell_1|$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. **Notons** $k = \frac{|\ell_2|}{2}$. **Puisque** $\ell_2 \neq 0$, $k < |\ell_2|$ **et comme** $|g(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |\ell_2|$, **il existe** $\eta_1 > 0$ **tel que**

$$\forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow k < |g(x)|.$$

d'autre part il

$$\exists \eta_2 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < k|\ell_2|\varepsilon$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. **Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2}\right| = \frac{|g(x) - \ell_2|}{|g(x)||\ell_2|} < \varepsilon$$

□

On peut étendre le théorème précédent aux limites infinies. Soient $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ **deux fonctions,** $x_0 \in \overline{\mathrm{I}}$, **éventuellement infini et un réel** α. **On suppose que** $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ **et** $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. **Nous avons résumé dans les tableaux suivants les limites de la somme, produit et quotient des deux fonctions dans tous les cas de figure. Les cases vide correspondent à des « formes indéterminées » où l'on ne peut rien dire de général.**

- **Somme** $f + g$

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

- **Produit** fg

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}^{-*}$	$+\infty$	$\ell\ell'$	**0**	$\ell\ell'$	$-\infty$
$\{0\}$		**0**	**0**	**0**	
$\mathbb{R}^{+*}$	$-\infty$	$\ell\ell'$	**0**	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

- **Inverse** $\frac{1}{f}$

ℓ	$-\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$	$\{0^-\}$	$\{0^+\}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$\frac{1}{f}$	**0**	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{\ell}$	**0**

Théorème 2.1. *(Théorème de composition des limites)*
Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ *et deux fonctions* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que* $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. *Soient*

$a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $b \in \bar{\mathrm{J}}$. On suppose que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad et \quad \lim_{y \to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$$

Démonstration. **Écrivons la preuve dans le cas où a et ℓ sont finis.**
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall y \in \mathrm{J},\ |y - b| \leq \alpha \Longrightarrow |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Puisque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$,

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I},\ |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \alpha$$

Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - a| \leq \eta$. Comme $y = f(x) \in \mathrm{J}$ et que $|f(x) - b| \leq \alpha$, on a $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$ d'où $|(g \circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon$. □

2.6 Limites et relation d'ordre

Proposition 2.8. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. On suppose qu'il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ tels que $k < \ell < k'$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 tel $\forall x \in V \cap \mathrm{I}, \quad k \leq f(x) \leq k'$.*

Démonstration. **Posons $\varepsilon = \min(\ell - k, k' - \ell)$. Puisque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ d'où si $x \in V \cap \mathrm{I}$, $f(x) - \ell \leq \varepsilon$ ce qui donne $f(x) \leq \ell + \varepsilon \leq \ell + (k' - \ell) \leq k'$ et aussi $\ell - f(x) \leq \varepsilon$ ce qui donne $f(x) \geq \ell - \varepsilon \geq k$.**

Théorème 2.2. *Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, un point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ telle qu'il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $k \leq f(x)$ (resp. $k < f(x)$). Alors $k \leq \ell$.*

Démonstration. **Écrivons la démonstration dans le cas où x_0 est ℓ sont finis. Supposons par l'absurde que $\ell < k$ et posons $\varepsilon = k - \ell > 0$. Puisque $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que**

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Puisque V est un voisinage du point x_0, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\subset V$. Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Puisque le point x_0 est adhérent à I, il existe $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ et on doit avoir d'une part $k \leq f(x)$ et $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ mais alors,

$$k \leq f(x) < \ell + \varepsilon = \ell + (k - \ell) = k$$

ce qui est absurde. □

Corollaire 6. *Soient deux fonctions $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \text{ et } g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$$

On suppose qu'il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $f(x) \leq g(x)$ (resp $f(x) < g(x)$ alors

$$\ell_1 \leq \ell_2$$

Démonstration. **Définissons la fonction $h = g - f$. D'après les propriétés des limites, $h(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2 - \ell_1$. D'autre part, sur un voisinage de x_0, on a $k = 0 \leq h(x)$. D'après le théorème précédent, $0 \leq \ell_2 - \ell_1$ d'où $\ell_1 \leq \ell_2$.** $\square$

Le principe des gendarmes est aussi valable pour les limites des fonctions.

Proposition 2.9. *(Le principe des gendarmes). Soient f, g et h des fonctions réelles, définies sur un voisinage V d'un point adhérent $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$.*

1. *Si pour tout $x \in V$ on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors*

$$\left(\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\longrightarrow x_0} h(x) = \ell\right).$$

2. *Si pour tout $x \in V$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors*
   (a) $\left(\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = +\infty\right)$.
   (b) $\left(\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = -\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = -\infty\right)$.

Démonstration.

1. **Écrivons la preuve dans le cas où x_0 est fini.**
   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$,

$$\exists \eta_1 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

   De même, puisque $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$,

$$\exists \eta_2 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

   Comme V est un voisinage du point x_0,

$$\exists \eta_3 > 0 \textbf{ tel que } \ ]x_0 - \eta_3, x_0 + \eta_3[\subset V.$$

   Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$. Puisque $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_1$, $\ell - \varepsilon \leq f(x)$. Puisque $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_2$, $g(x) \leq \ell + \varepsilon$ et puisque $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_3$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. On a finalement

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$$

   d'où $|h(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

2. **Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des suites.** $\square$

Proposition 2.10. *Soient f et g deux fonctions réelles. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$ et $g(x)$ est bornée, alors*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)g(x) = 0.$$

Exemple 10. *1. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0$. En effet on a*

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2, \quad \textit{et} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} x^2 = \lim_{x\longrightarrow 0}(-x^2) = 0$$

on déduit, par le principe des gendarmes que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^4+x^2+3}}{x^4}$, *définie sur* $\mathbb{R}^*$. *On a* $\sqrt{3} \leq \sqrt{2x^4+x^2+3}$. *En multipliant par* $\dfrac{1}{x^4}$ *qui est positif, on déduit que* $\frac{\sqrt{3}}{x^4} \leq f(x)$, *et puisque* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{3}}{x^4} = +\infty$, *on déduit que*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

3. $f(x) = \dfrac{x^4+3x^2}{x^6}\sin^2(x)$, *définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^4+3x^2}{x^6} = 0$ *et* $\sin^2(x)$ *est bornée alors*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0.$$

2.7 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.3. *Soient* $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ *et* $\mathrm{I} =]a,b[$. *Si une fonction* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est croissante (respectivement décroissante), alors il y a deux possibilités.*

1. *Si* f *est majorée, alors* f *admet une limite finie* ℓ *lorsque* x *tend vers* b *(resp* a*) et on a alors* $\ell = \sup\limits_{\mathrm{I}} f$.
2. *Si* f *n'est pas majorée, alors* $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$ *(resp* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$*).*

De même,

1. *Si* f *est minorée, alors* f *admet une limite finie* ℓ *lorsque* x *tend vers* a *(resp* b*) et on a alors* $\ell = \inf\limits_{\mathrm{I}} f$.
2. *Si* f *n'est pas minorée, alors* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ *(resp* $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} -\infty$*) .*

Démonstration. **Posons** $\mathcal{E} = \{f(x); x \in]a,b[\}$ **. La partie** $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ **est non vide. Étudions les deux cas.**

1. **Si la fonction** f **est majorée, alors la partie** $\mathcal{E}$ **est majorée et d'après la propriété de la borne supérieurs, elle possède une borne supérieure** $\ell \in \mathbb{R}$**. Montrons qu'alors** $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$**.**
Soit $\varepsilon > 0$**. D'après la de caractérisation de la borne supérieure, il existe** $y \in \mathcal{E}$ **tel que** $\ell - \varepsilon < y \leq \ell$**. Puisque** $y \in \mathcal{E}$ **, il existe** $x_0 \in]a,b[$ **tel que** $y = f(x_0)$**. Posons** $\eta = b - x_0 > 0$**. Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x-b| \leq \eta$**, on a** $x_0 \leq x \leq b$**. Puisque la fonction** f **est croissante,** $f(x_0) \leq f(x)$ **et comme** ℓ **est un majorant de** $\mathcal{E}$**, on a également** $f(x) \leq \ell$**. Finalement,**

$$\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. **Si la fonction** f **n'est pas majorée, montrons que** $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$**. Soit** $A > 0$**. Puisque** f **n'est pas majorée, il existe** $x_0 \in]a,b[$ **tel que** $A < f(x_0)$**. Posons** $\eta = b - x_0 > 0$**. Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x-b| \leq \eta$**. Puisque** $x_0 \leq x$ **et que** f **est croissante, on a** $A < f(x_0) \leq f(x)$**.** ■

3 Fonctions continues

Définition 3.1. *Soient* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ *et* $x_0 \in \mathrm{I}$

1. *On dit que la fonction f est <u>continue</u> au point x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, quand x tend vers x_0 pour tout $x \in \mathrm{I}$, ce qui s'écrit*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

   On peut formuler ceci de la façon suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0 \ \text{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

2. *On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I. On notera $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de I.*

Exemple 11. 1. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. Nous avons montrer que f tend vers $f(1) = 1$ quand x tend vers 1. Donc f est continue au point $x_0 = 1$.*

2. *Soit la fonction réelle f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\dfrac{1}{x}) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

   Au point $x_0 = 0$ on a

$$|f(x) - f(0)| = |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|.$$

   En prenant $\eta = \varepsilon$ on aura

$$|x| \leq \eta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

   Donc f est continue au point $x_0 = 0$.

3. *De même en appliquant directement la définition, on peut montrer facilement que la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_*^+$.*

4. *pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x^2 = x_0^2$. Ceci montre que la fonction $f(x) = x^2$ est continue en en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.*

5. *En général toutes les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur domaine de définition : x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x...*

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 2.4.

Proposition 3.1. *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*
f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Démonstration. **La démonstration est une conséquence immédiate du critère sequentiel.** □

Exemple 12. 1. *Nous avons vu que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite au point 0. Ceci montre que cette fonction n'est pas continue en 0.*

2. *La fonction $f(x) = E(x)$ n'admet pas de limite au point $k \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$.*

Définition 3.2. *Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$*

1. *f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

2. *f est continue à gauche en x_0 si* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 2.6.

Proposition 3.2. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 13. *Nous avons vu que la fonction définie par, $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$, admet 1 comme limite à droite en 0 et -1 comme limite à gauche en 0. Donc la fonction f n'est pas continue 0.*

3.1 Opération sur les fonctions continues

Théorème 3.1. *Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Si f et g sont des fonctions réelles continues en x_0 alors*

1. **les fonctions $|f|$, $sup(f,g)$, $inf(f,g)$, $f+g$, $f-g$ et αf sont continues en x_0,**
2. **si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage du point x_0 et est continue en x_0.**

Démonstration. **(1) est une conséquence directe des propriétés sur les limites.**
Vérifions (2). Puisque $|g(x_0)| \neq 0$ et que g est continue au point x_0, $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$ donc $|g(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |g(x_0)|$. Posons $k = \dfrac{|g(x_0)|}{2}$, on a $0 < k < |g(x_0)|$ donc il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in \mathrm{I}\cap V$, $0 < \dfrac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)|$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur V. La fonction $\dfrac{f}{g}$ est donc définie sur $\mathrm{I}\cap V$ et d'après les proriétés des limites, $(\dfrac{f}{g})(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{f}{g}(x_0)$.

Théorème 3.2. *(Continuité de la composée de deux applications)*
Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On suppose que f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

De manière générale, si f est continue sur I et g est continue sur J. Alors $(g \circ f)$ est continue sur I.

Démonstration. **C'est une conséquence immédiate du théorème 2.1.** □

3.2 Prolongement par continuité

Définition 3.3. *On dit que f est <u>discontinue</u> en x_0 si f n'est pas continue en x_0.*

Exemple 14. 1. *La fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0. En effet, au point $x = 0$, la fonction f est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$.

2. *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0 de plus $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \pm\infty$, d'où f n'est pas continue en 0.*

Définition 3.4. *Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et qu'elle admet en ce point une limite $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par :*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \in I \backslash \{x_0\} \\ \ell & si \;\; x = x_0 \end{cases}$$

est continue au point x_0 et appelée prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple 15. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et la fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si \;\; x \neq 0, \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0.

4 Les théorèmes fondamentaux

4.1 Continuité sur un segment

Une fonction f définie sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$ signifie qu'elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a ($\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$) et à gauche en b ($\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = f(b)$).
Le théorème suivant est fondamental en analyse.

Théorème 4.1. *(Théorème du maximum) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue alors f est bornée et atteint ses bornes càd si*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \;\; et \;\; M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

alors

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] / \; f(x_2) = m \;\; et \;\; f(x_1) = M$$

Démonstration. **La preuve utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass.**

– **Montrons, par l'absurde, que la fonction f est majorée : en supposant que la fonction f n'est pas majorée :**

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], \;\; f(x) > M$$

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. En prenant $M = n$, il existe $x_n \in [a, b]$ vérifiant $f(x_n) > n$. On construit ainsi une suite de points (x_n) du segment $[a, b]$ telle que $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $c \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, par passage à la limite dans les inégalités, $a \leq c \leq b$. Mais la fonction f est continue au point c donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(c)$. On obtient une contradiction puisque $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- **Définissons la partie de $\mathbb{R}$, $F = \{f(x); x \in [a,b]\}$. Elle est non vide puisque $f(a) \in F$. De plus, elle est majorée puisqu'on a vu que f était majorée. Elle admet donc une borne supérieure, $M = \sup F = \sup_{\mathrm{I}} f$. Montrons que cette borne supérieure est atteinte. D'après la caractérisation de la borne supérieure,**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in [a,b],\ \textbf{tel que } M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

Pour tout entier n non nul, en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

La suite (x_n) étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $x_1 \in [a,b]$. Puisque la fonction f est continue au point x_1, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_1)$. On a d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que $M \leq f(x_1) \leq M$ d'où $M = f(x_1)$.
- **Pour montrer que f possède une borne inférieure et que cette borne inférieure est atteinte, on utilise les mêmes techniques.** □

4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.2. *(TVI)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout $c \in f\,(]a,b)\,[$, il existe un $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = c$.

Remarque 4.1. *Attention le point x_0 n'est pas unique.*

Démonstration. **Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. On peut supposer que $f(a) < f(b)$ et soit $c \in]f(a), f(b)[$.**
Soit A l'ensemble

$$A = \{x \in [a,b],\ f(x) \leq c\}.$$

On a clairement $a \in A$ et donc A est non vide et en plus A est majoré par b. D'après le théorème de la borne supérieure, A admet une borne supérieure.
Soit $x_0 = \sup A$. Donc il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tell que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et donc $f(a_n) \leq c$ et puisque f est continue en x_0, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0)$ d'où $f(x_0) \leq c$.
D'un autre côté, on a $x_0 < b$ car $c < f(b)$ et donc pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) > c$. Il en résulte alors que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \geq c$. Finalement, $f(x_0) = c$. □

Une variante du théorème des valeurs intermédiaires, qui permet de résoudre certaines équations numériques, est donnée par :

Théorème 4.3. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si on a $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Attention là aussi le point x_0 n'est pas unique.

Exemple 16. *Nous allons montrer que l'équation $x^3 - 2x + 2 = 0$ admet une solution sur $] - 2, 1[$. On considère la fonction*

$$f(x) = x^3 - 2x + 2.$$

Cette fonction est continue sur $[-2, 1]$ et $f(-2)f(1) = -2 < 0$. D'après le corollaire 4.3, il existe $x_0 \in] - 2, 1[$ tel que $f(x_0) = 0$. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine x_0 sur l'intervalle $] - 2, 1[$.

4.3 Application du TVI

Corollaire 7. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Démonstration. **On suppose que $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et que f est continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle de I. Nous allons montrer que $f(\mathrm{J})$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$. Cela revient à prouver que pour tout $y_1, y_2 \in f(\mathrm{J})$, on a $[y_1, y_2] \subset f(\mathrm{J})$. Soit $y_1, y_2 \in f(\mathrm{J})$. Il existe $x_1, x_2 \in \mathrm{J}$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Soit $y \in [y_1, y_2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $y \in f(\mathrm{J})$. On prouve ainsi que $[y_1, y_2] \subset f(\mathrm{J})$.** □

Corollaire 8. *L'image d'un segment $[a, b]$ par une application continue est un segment et si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$ alors $f([a, b]) = [m, M]$.*

Démonstration. **Puisque M est un majorant de $f([a, b])$ et m un minorant de $f([a, b])$, on a $f([a, b]) \subset [m, M]$. Montrons que $[m, M] \subset f([a, b])$. Soit $y \in [m, M]$. Comme les bornes sont atteintes, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tel que $M = f(x_1)$ et $m = f(x_2)$. Un segment est un intervalle, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $y \in [f(x_1), f(x_2)]$, il existe $x \in [x_1, x_2] \subset [a, b]$ tel que $y = f(x)$ ce qui montre que $y \in f([a, b])$.** □

4.4 Théorème de la bijection

Théorème 4.4. *Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et $f^{-1} : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue strictement monotone de même type de monotonie que f.*

Preuve. Supposons par exemple que f est strictement croissante. Montrons qu'alors f est injective. Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tels que $f(x) = f(y)$, montrons que $x = y$ par l'absurde. Si l'on avait $x \neq y$, on aurait $x < y$ ou $y < x$, mais alors, puisque f est strictement croissante, on aurait $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde. D'autre part le théorème des VI prouve que f est surjective. Ainsi f est une bijection de I sur J.
Soient $(X, Y) \in \mathrm{J}^2$ tels que $X < Y$. Notons $x = f^{-1}(X)$ et $y = f^{-1}(Y)$. Si l'on avait $y \leq x$, puisque f est croissante, on aurait $f(y) \leq f(x)$ et donc $Y \leq X$ ce qui est faux. On en déduit que $x < y$ donc que $f^{-1}(X) < f^{-1}(Y)$.
Nous allons montrer maintenant que $f^{-1} : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue.
Soit $y_0 = f(x_0) \in \mathrm{J}$ avec $x_0 \in \mathrm{I}$ et soit $(f(x_n))_{n \in N}$ une suite qui converge vers y_0. Nous allons montrer

que la suite $(f^{-1}(f(x_n))_{n\in N} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{-1}(y_0) = x_0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \in \mathrm{I}$. Puisque f est continue et strictement croissante, d'après le théorème 4.1, on a

$$f([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]) = [f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)] = [y_1, y_2]$$

et $f(x_0) = y_0 \in [y_1, y_2]$. Puisque la suite $(f(x_n))_{n\in N}$ converge vers y_0, il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f(x_n) \in [y_1, y_2]$, soit $x_n \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x_0.$$

□

Remarque 4.2. *Soit f une fonction bijective sur* I. *Le graphe de f^{-1}, dans un repère orthonormé, se déduit de celui de f par une symétrie d'axe par rapport à la première bissectrice*

5 Fonctions uniformément continues

5.1 Fonctions Lipschitziennes

Définition 5.1. – *Soit un réel $k > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

On note $\mathcal{L}(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I.

– *Si $0 \leq k < 1$, et f est k-lipschitzienne, on dit que f est contractante.*

Proposition 5.1. 1. *Une combinaison linéaire de deux fonctions lipschitzienne est encore lipschitzienne. Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$.*

2. *La composée de deux fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{J})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, alors $(g\circ f) \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$.*

3. *Soit $c \in \mathrm{I}$, on note $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I} \cap]-\infty, c]$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I} \cap [c, +\infty[$. Si f est lipschitzienne sur I_1 et sur I_2, alors elle est lipschitzienne sur* I.

Démonstration.

1. Puisque f et g sont lipschitziennes sur I, il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k_1|x-y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq k_2|x-y|$. Posons $k = |\alpha|k_1 + |\beta|k_2$. Soit $(x,y) \in \mathrm{I}^2$, utilisons l'inégalité triangulaire

$$|(\alpha f+\beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leq (|\alpha|k_1 + |\beta|k_2)|x-y| = k|x-y|$$

2. Comme f est lipschitzienne sur I, il existe $k_1 > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k_1|x-y|$. Puisque g est lipschitzienne sur J, il existe $k_2 > 0$ tel que $\forall (X,Y) \in \mathrm{J}^2$, $|g(X) - g(Y)| \leq k_2|X-Y|$. Posons $k = k_1k_2$. Soient $(x,y) \in \mathrm{I}^2$, puisque $X = f(x) \in \mathrm{J}$ et $Y = f(y) \in \mathrm{J}$,

$$|g\circ f(x) - g\circ f(y)| = |g(X) - g(Y)| \leq k_2|X-Y| = k_2|f(x) - f(y)| \leq k_1k_2|x-y|$$

3. Exercice.

Théorème 5.1. ***(Théorème de point fixe)***
Soit f une fonction contractante de rapport k sur un segment $\mathrm{I} = [a, b]$ tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. L'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I.
On dit que α est l'unique point fixe de f.

Démonstration. **Il suffit d'appliquer le TVI à la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur $[a, b]$.**

5.2 Continuité uniforme

Définition 5.2. *Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est uniformément continue sur I lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x, y) et s'appelle un module d'uniforme continuité.

Proposition 5.2. *Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.*

$$f \text{ Lipschitzienne sur } \mathrm{I} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue sur } \mathrm{I} \Longrightarrow f \text{ continue sur } \mathrm{I}$$

Démonstration.

- **Supposons f lispchitzienne sur I, il existe $k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.**
  Montrons que f est uniformément continue sur I.
  Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$.
  Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\eta = \varepsilon$$

- **Supposons f uniformément continue sur I et montrons que f est continue sur I. Soit $a \in \mathrm{I}$, montrons que la fonction f est continue au point a.**
  Soit $\varepsilon > 0$, Puisque f est uniformément continue sur I, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

  Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on a bien $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. □

Théorème 5.2. ***(Théorème de Heine)***
Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment

Démonstration. **Nous allons construire des suites et utiliser le théorème de Bolzano-Weirstrass. Nous devons montrer que**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que cette propriété est fausse :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $n \in N^*$, en prenant $\eta = \dfrac{1}{n}$, on peut trouver deux réels $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$ vérifiant

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \textbf{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

On construit ainsi deux suites (x_n) et (y_n) de points du segment $[a, b]$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente, $(x_{\varphi(n)})$ vers une limite $c \in [a, b]$. Puisque

$$|y_{\varphi(n)}) - c| \leq |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{n} + |x_{\varphi(n)} - c| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

la suite $(y_{\varphi(n)}))$ converge également vers la même limite c. Puisque la fonction f est continue au point c, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(x_{\varphi(n)})) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(c)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(c)$. Mais comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})|$, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que $0 < \varepsilon < |f(c) - f(c)| = 0$ ce qui est absurde. $\square$